Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Az $a > 1$ rögzített valós szám esetén értelmezzük az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot úgy, hogy $x_1 = a$ és bármely $n \geq 1$ esetén

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1}.$$

Igazold, hogy a sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $AB = 0_3$ egyenlőséget.

a) Igazold, hogy az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xBA)$ függvény legfeljebb másodfokú polinomfüggvény!

b) Igazold, hogy $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

3. feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixok teljesítik az $A \cdot B^2 = A - B$ egyenlőséget, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy $I_n + B$ invertálható!

b) Igazold, hogy $AB = BA$.

4. feladat. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{F}$ tulajdonságú, ha bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan (b, a) intervallum, amelyre bármely $x \in (b, a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$.

a) Adj példát olyan $\mathcal{F}$ tulajdonságú függvényre, amely nem monoton $\mathbb{R}$-en!

b) Igazold, hogy ha létezik folytonos $\mathcal{F}$ tulajdonságú f függvény, akkor f növekvő!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.